Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

$5\frac{1}{2}$

1.

$f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$

~~$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot -1 + 1 \cdot e^{-x}$ (productregel)~~
~~$= -1 \cdot (x+1) e^{-x}$~~

~~$f''(x) = (-1)^2 \cdot (xe^{-x})' + (e^{-x})'$~~
~~$= (-1)^2 \cdot ($~~

$f'(x) = \frac{e^x \cdot 1 - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = (1-x)e^{-x}$

$f^{(1)}(x) = (1-x)e^{-x} = -(x-1)e^{-x}$

$f'(x) = (-1)\frac{(x-1)}{e^x} \Rightarrow f''(x) = (-1) \cdot \frac{e^x \cdot 1 - (x-1)e^x}{(e^x)^2}$

$= -1 \cdot \frac{e^x(1-(x-1)}{(e^x)^2} = (-1) \cdot (1-(x-1))e^{-x}$
$= (-1) \cdot (-1)(x-2)e^{-x}$
$= (-1)^2 (x-2) e^{-x}$

Als voor $f^{(n)}(x)$ geldt: $(-1)^n (x-n)e^{-x}$
n is een geheel getal

Dan $\Rightarrow$ voor $n+1 \Rightarrow (-1)^{n+1} (x-(n+1))e^{-x}$
$\Rightarrow (-1)^n \cdot (-1)^1 (x-n-1))e^{-x}$
$\Rightarrow (-1)^n \cdot (x-n)e^{-x} \cdot (-1) \cdot (-1)e^{-x}$
$\Rightarrow f^{(n)}(x) \cdot (-1) \cdot (-1]e^{-x}$

n is altijd positief dus min-~~teken verandert~~ niet.

Dus als hij voor $f^{(n)}(x)$ dan geldt hij ook voor $f^{(n+1)}(x)$. En hij geldt voor $f'(x)$.

waarom?

Verder een positief geheel getal.

Dus hij klopt. (Dit is ook te zien doordat de afgeleide elke keer hetzelfde blijft met alleen de e^{-x} factor erbij die naar $(-1) \cdot (-1)e^{-x}$ om te schrijven is elke keer.)

Dus geldt volgens inductie:
$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n)e^{-x}$

2. $|f(x)| \leq 100$

Dus $0 \leq |f(x)| \leq 100$

Als voor $f(x) \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 100$
betekent dat deze functie continu is. ~~en diff baar~~
deze conclusie klopt niet.

Als continu in een punt $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

In dit geval $\Rightarrow \lim_{x\to 0} (g(x)) \overset{?}{=} g(0)$
$g(x) = xf(x)$ dus
$$\lim_{x\to 0} xf(x) = xf(0) \overset{?}{=} 0$$

~~Verder lim~~

Als bij $\lim_{x\to 0} x f(x) \overset{?}{=} xf(0)$, de x steeds

kleiner wordt, geldt $\lim_{x\to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

$\Rightarrow f(0) = f(0)$.

Dit klopt. De limiet bestaat (f continu) ~~~~
en $f(0)$ bestaat (gegoven).
Ook $\lim_{x\to 0} x f(x) = x f(0)$

Dus $\lim_{x\to 0} (g(x)) = g(0)$.

Dus $g(x)$ is continu in $x = 0$.

3. $f(x) \Rightarrow x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{h}$$

~~$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{h}$~~

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = f'(x)$$

$$\cancel{\lim_{h\to0} \frac{x\cos\left(\frac{1}{x+h}\right)}{h} + \cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - \cos\left(\frac{1}{h}\right)}$$

~~Voor f'(x) geldt~~ $\cancel{\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\cos\left(\frac{1}{h}\right)}$

Voor limiet $\rightarrow$ voor elke $|F(x)-L| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-a| < \delta$

$a=0 \qquad \Rightarrow |x| < \delta$

$|F(x) - f(0)| < \varepsilon$

3 $\quad \Rightarrow |F(x)| < \varepsilon$

er is een $|x| < \delta$ $\qquad$ er is geen δ zodat $|F(x-L)| < \varepsilon$ bij $x=0$

Echter als $x \to 0^+$ dan $\cos\frac{1}{x} \to \cos\infty$

Dit is een ongedefinieerde functie dus $\lim_{h\to0} \frac{(x+h)\cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - x\cos\frac{1}{x}}{h}$ bestaat niet. Dus f is niet diff. baar in $x=0$ $\;x \to 0$

4 $\quad$ **4.** $\lim_{x\to0} \frac{\sinh(x)}{\sin(x)} \Rightarrow$ als $x\to0 \Rightarrow \sinh(x) \to 0$ en $\sin(x) \to 0$

$\Rightarrow$ Dan $\lim_{x\to0} \frac{\sinh(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{0}$

Dus L'Hospital regel:

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{\sinh(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\cosh(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{\cosh(x)}{\cos(x)} = \frac{\cosh(0)}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Dus $\lim_{x\to0} \frac{\sinh(x)}{\sin(x)} = 1$

$$f'(x) = \cancel{\quad} \times (x^2+1)^{x-1} \cdot 2x \quad \text{('Power' regel en ketting regel)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cancel{2x^2 (x^2+1)^{x-1}}$$

Logarithmisch!

0

6. $f(x) = \cos^2(x) \cdot e^x$

3

Berekenen $\Rightarrow F(x) = \int \cos^2(x) \cdot e^x \, dx$

$$(\cos^2(x))' = 2 \cdot \cos(x) \cdot -\sin(x) = -2\sin(x)\cos(x)$$
$$= -\sin(2x)$$

$\Rightarrow$ partiëel integreren.

$$F(x) = \int \cos^2(x) e^x dx = e^x \cdot \cos^2(x) - \int e^x \cdot -\sin(2x) dx$$

Dan weer partiëel integreren

$$\int -\sin(2x) \cdot e^x dx = -\sin(2x) \cdot e^x - \int -2\cos 2x \cdot e^x dx$$

Maar $\cos^2(x) - \sin^2 x = \cos 2x$

$2\cos^2(x) - 1 = \cos 2x$

$\Rightarrow$

$$\int \cos^2(x) \cdot e^x dx = e^x \cdot \cos^2(x) - \left(-\sin(2x) \cdot e^x - \int -2\cos 2x \cdot e^x dx\right)$$

$$\int \cos^2(x) \cdot e^x dx = e^x \cdot \cos^2(x) - \left(-\sin(2x) \cdot e^x + \int 2\cos 2x \, e^x dx\right)$$

$$\int \cos^2(x) \cdot e^x dx = e^x \cdot \cos^2(x) + \sin(2x) \cdot e^x - \int 2\cos 2x \cdot e^x dx$$

$$\int \cos^2(x) e^x dx = e^x \cdot \cos^2(x) + \sin(2x) e^x - \int 2(\cos^2 - 1) e^x dx$$

$$\Rightarrow \int 2(\cos^2 - 1) e^x dx = 2\int \cos^2 e^x - e^x dx$$
$$= 2\int \cos^2 e^x dx - 2\int e^x dx$$

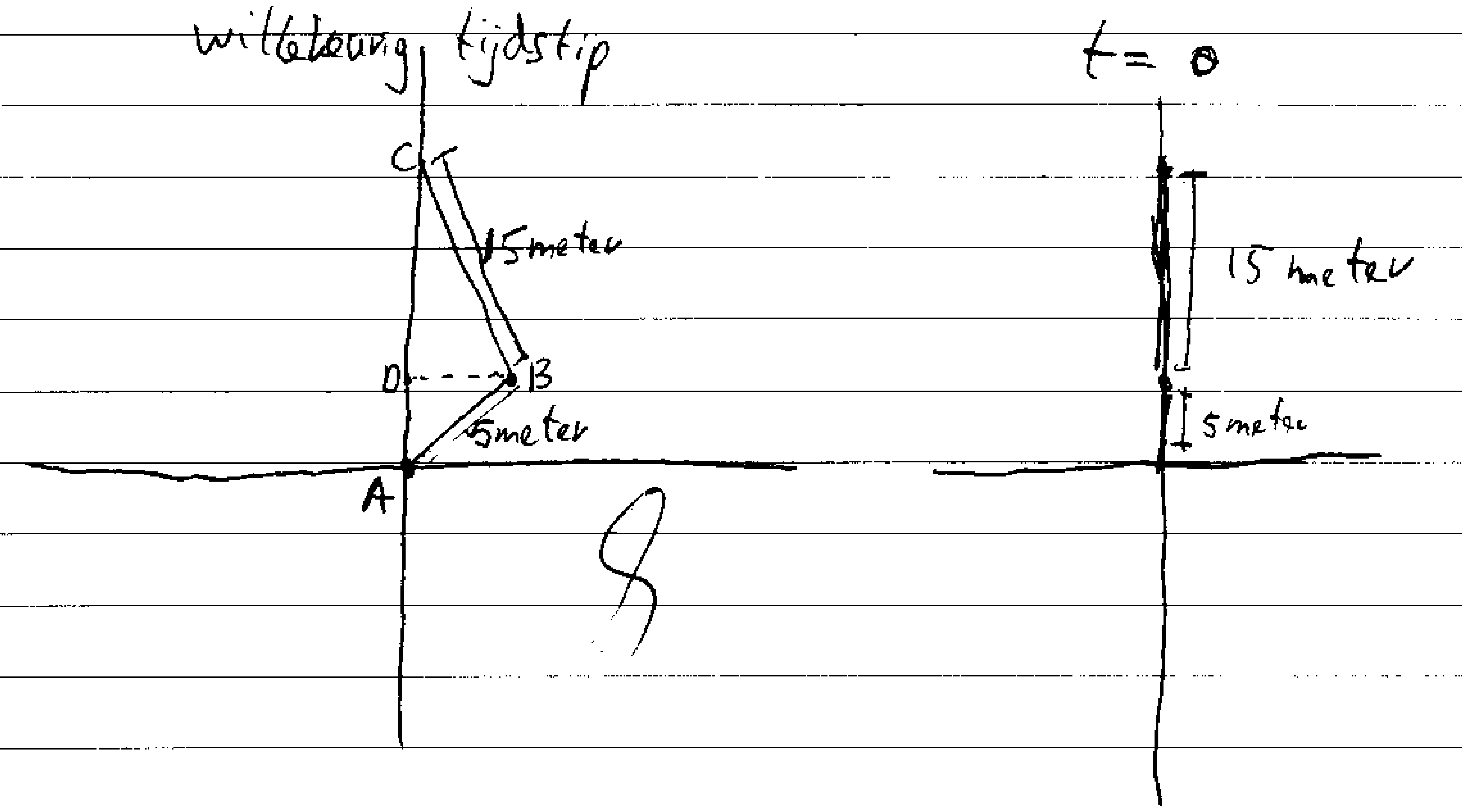
$$\Rightarrow 3\int \cos^2(x) e^x dx = e^x \cdot \cos^2(x) + \sin(2x) \cdot e^x - 2e^x + C$$

$$\int \cos^2(x) e^x dx = \frac{1}{3} e^x (\cos^2(x) + \sin(2x) - 6) + C$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

7.

2



De baan die punt B beschrijft is een cirkel.

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5$

Verder, beschouw de driehoeken DBC en ABD (zie hierboven).
Voor de lengte DC geldt $\Rightarrow 15^2 - x^2 = DC^2$

AD + DC is het hoogste punt van de lange staaf op willekeurig tijdstip.

$AD = y_1 \Rightarrow AD^2 = 5^2 - x^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{25 - x^2}$

$\Rightarrow DC = y_2 \Rightarrow$ ~~$DC = \sqrt{225 \ldots}$~~

$DC^2 = 15^2 - x^2$

$DC = \sqrt{225 - x^2}$

Dus $y = y_1 + y_2 = \sqrt{225 - x^2} + \sqrt{25 - x^2}$

Op $t = 0$ geldt $x = 0$ en daarna wordt hij kleiner.
~~Dus $x = \sin t$ en $y = \cos t$~~

Verder hoeksnelheid $= 100\pi$ rad
En 'amplitudo' $= 5$

Dit betekent $x = -5\sin(100\pi t)$

$\Rightarrow y = \sqrt{225 - (-5\sin(100\pi t))^2} + \sqrt{25 - (-5\sin(100\pi t))^2}$

$= \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)} + \sqrt{25 - 25\sin^2(100\pi t)}$

$$y = \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)} + \sqrt{25 - 25\sin^2(100\pi t)}$$

$$= \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)} + \sqrt{25 - 25(1 - \cos^2(100\pi t))}$$

$$= \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)} + \sqrt{25 - 25 + 25\cos^2(100\pi t)}$$

$$= \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)} + \sqrt{25\cos^2(100\pi t)}$$

$$= 5\cos(100\pi t) + \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)}$$

QED

8. $(x^2-1)y' = y^2 + y$ (niet constant dus $y(x) \neq 0$) (want is wel oplossing)

$$\frac{dy}{dx}(x^2-1) = y^2 + y$$

$$dy\,(x^2-1) = (y^2+y)\,dx$$

$$\frac{dy}{y^2+y} = \frac{dx}{x^2-1}$$

De vergelijking is dus separabel. Dus allebei de kanten integreren.

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y} = \int \frac{dx}{x^2-1}$$

breuksplitsen!

$$\int \frac{dy}{y^2+y} = \ln(y^2+y) \cdot \frac{1}{2y+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \ln(x^2-1) \cdot \frac{1}{2x} + C$$

$$\Rightarrow \ln(y^2+y) \cdot \frac{1}{2y+1} = \ln(x^2-1) \cdot 2x + C$$

$$\frac{1}{2y+1}\ln(y^2+y) = \frac{1}{2x}\ln(x^2-1) + C$$

$$\ln(y^2+y)^{\frac{1}{2y+1}} = \ln(x^2-1)^{\frac{1}{2x}} + C$$

$$(y^2+y)^{\frac{1}{2y+1}} = (x^2-1)^{2x} + C$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

9. gegeven $(x(t), y(t))$ met $x(t) = t^3 \quad y(t) = 3t^2$

Formule

$\Rightarrow$ lengte kromme $= \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$

$\frac{dy}{dt} = 6t \cdot \frac{dx}{dt} = 3t^2$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36t^2 \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 9t^4$

$\Rightarrow$ lengte kromme $\int_{-1}^{1} \sqrt{36t^2 + 9t^4}\, dt$

3

$= \int_{-1}^{1} \sqrt{t^2 \cancel{(} 36 + 9t^2}\, dt$

$= \int_{-1}^{1} t\sqrt{36 + 9t^2}$

niet nodig!! Gebruik kettingregel!!

$\Rightarrow$ Goniome~~trische~~ substitutie $\Rightarrow$ $t = 2\tan\Theta$

(mag want $-1 \leq t \leq 1$) $\quad \frac{dt}{d\Theta} = 2\sec^2\Theta$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} 2\tan\Theta \sqrt{36 + 9(2\tan\Theta)^2}\; 2\sec^2\Theta\, d\Theta$

$= \int_{-1}^{1} 2\tan\Theta \sqrt{36 + 36\tan^2\Theta}\; 2\sec^2\Theta\, d\Theta$

$= \int_{-1}^{1} 2\tan\Theta \sqrt{36 + 36(\sec^2\Theta - 1)}\; 2\sec^2\Theta\, d\Theta$

$= \int_{-1}^{1} 2\tan\Theta \cdot 6\sec\Theta \cdot 2\sec^2\Theta\, d\Theta$

$$= \int_{-1}^{1} 2\tan\Theta \cdot 6\sec\Theta \cdot 2\sec^2\Theta \, d\Theta$$

$$= \int_{-1}^{1} 24 \tan\Theta \ \sec^3\Theta \, d\Theta$$

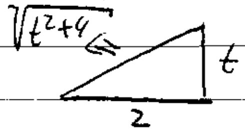
$$\cancel{= \int_{-1}^{1} 12\cdot(2\tan\Theta) \cdot (1+\tan^2\Theta)\cdot \tan\Theta \, d\Theta}$$

$$\cancel{= \int_{-1}^{1} 12\cdot(2\tan^2\Theta) + 2\tan^4\Theta}$$

$$\cancel{\Rightarrow t = 2\tan\Theta}$$

$$\int_{-1}^{1} 6 \cdot 2\tan\Theta \cdot \sec\Theta \cdot 2\sec^2\Theta \, d\Theta$$

$$t = 2\tan\Theta \qquad \frac{dt}{d\Theta} = 2\sec^2\Theta \, d\Theta$$



$$\Rightarrow \sec\Theta = \frac{\sqrt{t^2+4}}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} 6t \cdot \frac{\sqrt{t^2+4}}{2} \cdot dt$$

$$\int_{-1}^{1} 3t \cdot \sqrt{t^2+4} \, dt \qquad \text{Dan} \quad u = t^2$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

$$1\tfrac{1}{2}\,du = 3t\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{u+4} \cdot 1\tfrac{1}{2}\,du$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot (u+4)^{1\frac{1}{2}} \cdot 1\frac{1}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[(u+4)^{1\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1} = \left[(t^2+4)^{1\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= (5)^{1\frac{1}{2}} - (3)^{1\frac{1}{2}}$$

$$= \underline{\underline{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}}$$

Dat is de lengte vd kromme voor $-1 \leq t \leq 1$
en $x(t) = t^3$,
$y(t) = 3t^2$